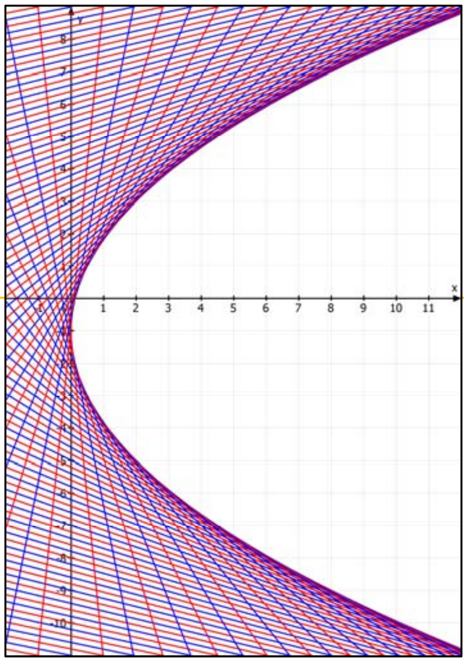


Hüllkurve von Kurvenscharen

Text Nr. 54031

Stand: 9. März 2016

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Im Zusammenhang mit der Arbeit an Texten für algebraische Kurven im Ordner 54, stieß ich auf das Thema Hüllkurven. Dieses habe ich im vorliegenden Text behandelt.

Das eigentliche Thema umfasst im Grunde nur 4 Seiten:

Auf Seite 3 und 4 zeige ich zwei Einführungsbeispiele, auf Seite 5 zeige ich die kurze Theorie dazu, und auf Seite 6 stelle ich zwei Varianten der Berechnungsmethode gegenüber.

Dann kommen sehr viele Beispiele. Meine Mathematik-CD enthält im Text 42064 ein Bilderbuch für 28 Parabelscharen. Zu den meisten habe ich hier die Hüllkurve berechnet. Ich liefere dann auch nochmals ein Schaubild der Kurvenschar, zusammen mit der Hüllkurve.

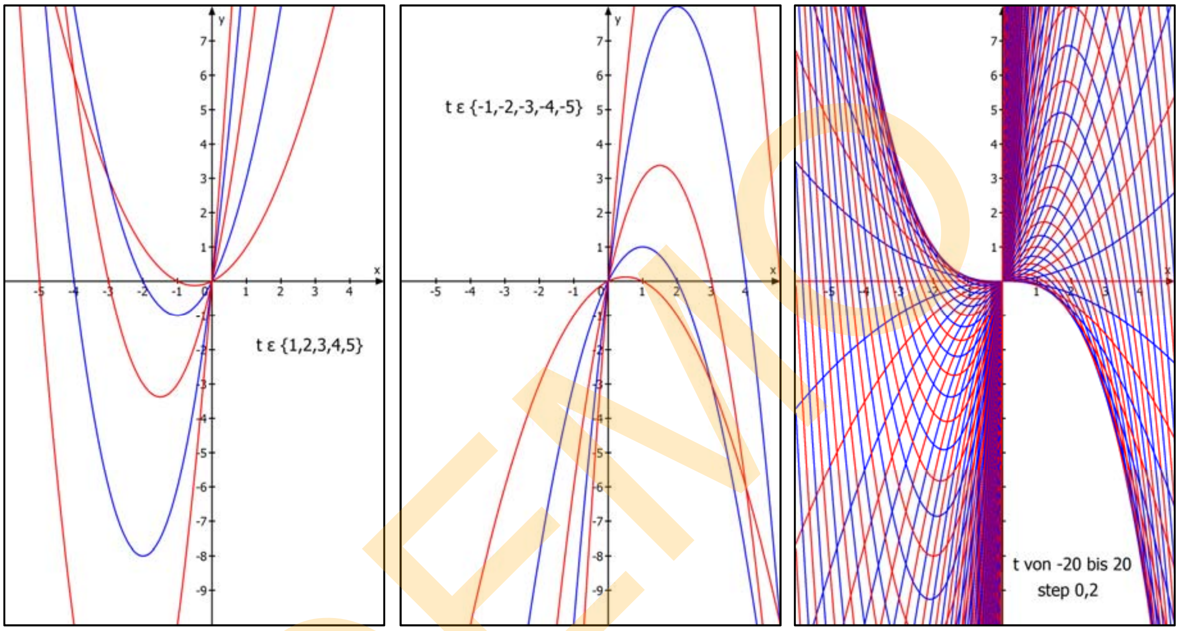
Inhalt

1 Schnelle Methode

Einführungsbeispiele

(1) Gegeben ist diese Parabelschar $y = f_t(x) = \frac{t}{2}x^2 + \frac{t^2}{2}x$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die folgende Abbildung zeigt drei Abbildungen mit Kurven dieser Schar. Je nach verwendeten Parameterwerten erhält man eine andere Ansicht. Aber erst bei sehr vielen Kurven erkennt man, dass es eine „Hüllkurve" gibt, die offenbar eine Art Grenze für diese Kurvenschar darstellt.
Sie hat die Gleichung $y = -\frac{1}{8}x^3$.



Hier eine Anleitung (ohne Begründung) zur Berechnung dieser Kurvengleichung.

Man schreibt zunächst die Funktionsgleichung $y = f_t(x) = \frac{t}{2}x^2 + \frac{t^2}{2}x$

als Funktion von zwei Variablen: $F(x,t) = \frac{t}{2}x^2 + \frac{t^2}{2}x$

Dann leitet man sie nach dem Parameter t ab: $\frac{d}{dt}F(x,t) = \frac{1}{2}x^2 + t \cdot x$

Diese Gleichung setzt man Null: $\frac{1}{2}x^2 + t \cdot x = 0$

Dann löst man dieses Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = F(x,t) \\ \frac{d}{dt}F(x,t) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y = \frac{t}{2}x^2 + \frac{t^2}{2}x & (1) \\ \frac{1}{2}x^2 + t \cdot x = 0 & (2) \end{array} \right\}$$

Aus (2) berechnet man $t = -\frac{1}{2}x$ und setzt das in (1) ein: $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^3$

Zusammengefasst: $y = -\frac{1}{8}x^3$

(2) $f_t(x) = \frac{2}{t}x + t - 1 \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Implizite Gleichung: $F(x,t) = 2t^{-1}x + t - 1$

Ableitung nach t:

$$\frac{d}{dt}F(x,y) = -2t^{-2}x + 1 = -\frac{2}{t^2}x + 1$$

Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} y = F(x,t) \\ \frac{d}{dt}F(x,t) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y = \frac{2}{t}x + t - 1 & (1) \\ -\frac{2}{t^2}x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right\}$$

Aus (2) folgt:

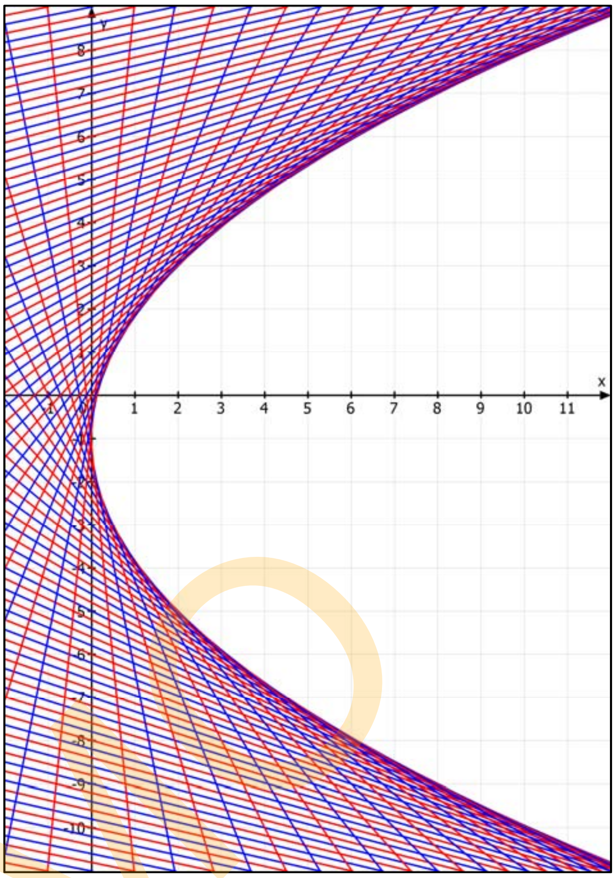
$$\frac{2}{t^2}x = 1 \Rightarrow t^2 = 2x \Rightarrow t = \pm\sqrt{2x}$$

In (1): $y = \pm\frac{2x}{\sqrt{2x}} \pm \sqrt{2x} - 1$

Durch $\sqrt{2x}$ kürzen:

$$y = \pm\sqrt{2x} \pm \sqrt{2x} - 1$$

$$y = \pm 2\sqrt{2x} - 1$$



Hier nochmals dieselbe Geradenschar mit nur wenigen Geraden, damit man die Hüllkurve sehen kann.

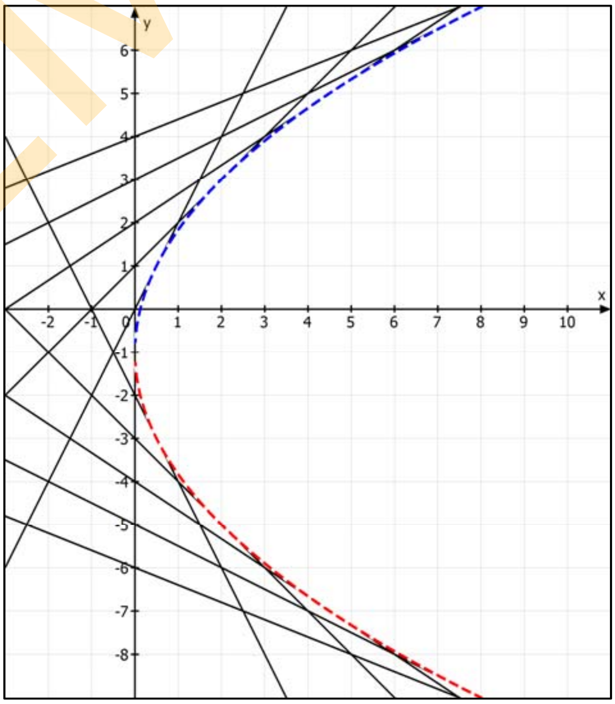
Sie hat die Gleichung $y^2 = 8x - 1$

und ist eine nach rechts geöffnete Parabel.

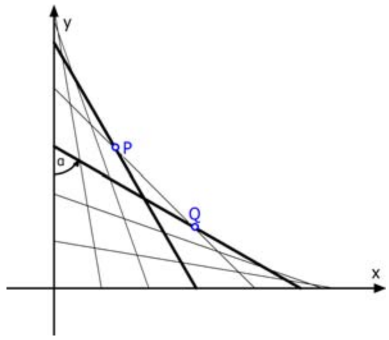
Die beiden erzeugenden Teilfunktionen sind

$y = 2\sqrt{2x} - 1$ (obere Halbparabel)

und $y = -2\sqrt{2x} - 1$ (untere Halbparabel).



2 Etwas Theorie



Rechts die Abbildung eines Viertelbogens der **Asteroide** zusammen mit zwei Tangenten. Wenn man diese Tangenten als Strecken (Stangen, Leiter) der konstanten Länge a betrachtet, die nach unten wegrutschen ($B \to O,\ M \to A$), dann ist die Asteroide die Einhüllende, also die Ortskurve der Berührpunkte aller Tangenten.

Überlegungen zur Bestimmung der Hüllkurve

Im Text 54115 Seite 14 wurde gezeigt, dass die Gleichung dieser Tangenten so lautet:

$$x \cdot \cos(t) + y \cdot \sin(t) = a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

Dabei ist t der Parameter, der die Lage der Tangente kennzeichnet. Er kann auch α heißen …..

Zur linken Seite definiert man eine „implizite“ Funktion F (d. h. sie enthält alles, also x und y):

$$F(x,y,t) = x \cdot \cos(t) + y \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

Jede Tangente ist dann sozusagen eine Lösung der Gleichung $F(x,y,t) = 0$ für vorgegebenes α.

Die Hüllkurve berührt jede Tangente. Man kann sie dadurch annähern, dass man die Schnittpunkte benachbarter Tangenten „zusammenrücken lässt“, also die Grenzlage ermittelt. Das geht so:

$P(u\,|\,v)$ sei der Schnittpunkt der „benachbarten“ Tangenten. Diese haben die Gleichungen

$$F(x,y,t) = 0 \quad \text{und} \quad F(x,y,t+\Delta t) = 0\,.$$

Also gilt: $$F(u,v,t) = 0 \quad \text{und} \quad F(u,v,t+\Delta t) = 0\,.$$

Dann ist aber auch $$\frac{F(u,v,t+\Delta t) - F(u,v,t)}{\Delta t} = 0$$

Zusammenrücken lassen bedeutet aber $\Delta t \to 0$.

Dann passiert Bekanntes: $$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{F(u,v,t+\Delta t) - F(u,v,t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} F(x,y,t) \quad \text{im Punkt } P(u\,|\,v)\,.$$

Für die Punkte, welche die Hüllkurve bilden, gelten somit zwei Gleichungen:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{d}{dt} F(x,y,t) = 0 \end{matrix}\right\}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\left\{\begin{matrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{matrix}\right\}}$$

⇨ F_t ist die Abkürzung für die (partielle) Ableitung nach t, also $\frac{d}{dt} F(x,y,t)$.

Man muss nur noch t eliminieren und erhält dann eine Gleichung der Hüllkurve.

Hinweis: Ist Ihnen aufgefallen, dass die in den beiden Anfangsbeispielen angewandte Methode etwas anders aussieht?
Auf der folgenden Seite gebe ich praktische Tipps, wie man vorgehen könnte.

3 Tipps zur Bestimmung einer Hüllkurve

Gegeben sei die Parabelschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d. h. $y = t^{-1} \cdot x^2 - 4x + 3t$

1. Methode: *Wir leiten y nach t ab und halten dazu x als Konstante fest:*

$$\frac{dy}{dt} = -t^{-2} \cdot x^2 + 3$$

Erklärung: x^2 ist ein konstanter Faktor von t^{-1} und bleibt daher stehen,
-3x ist ein konstanter Summand und fällt beim Ableiten weg.
aus 3t wird durch Ableiten nach t die Zahl 3.

Gleichungssystem für die Hüllkurve:

$$\left\{\begin{array}{lr} y = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t & (1) \\ -t^{-2}x^2 + 3 = 0 \quad | \cdot t^2 & (2) \end{array}\right\}$$

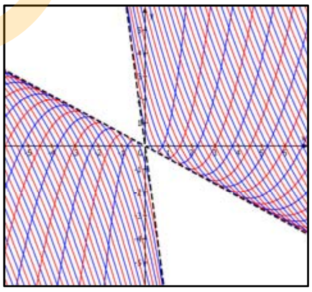
Aus (2) folgt: $-x^2 + 3t^2 = 0 \iff 3t^2 = x^2 \iff t^2 = \frac{1}{3}x^2 \iff t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x$

(*) In (1): $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x}x^2 - 4x \pm \underbrace{3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}_{\sqrt{3}} \cdot x$

Das ergibt: $y = \pm\sqrt{3} \cdot x - 4x \pm \sqrt{3} \cdot x$

Die +Variante lautet $y = \left(2\sqrt{3} - 4\right) \cdot x \approx -0{,}546 \cdot x$

Die –Variante lautet $y = \left(-2\sqrt{3} - 4\right) \cdot x \approx -7{,}464 \cdot x$



Ergebnis: Die Parabelschar hat 2 Geraden als Hüllkurve!

2. Methode: Man bildet die implizite Funktion $F(x,y,t) = y - t^{-1} \cdot x^2 + 4x - 3t$

und berechnet ihre Ableitung nach t: $\frac{d}{dt}F(x,y,t) = t^{-2} \cdot x^2 - 3$

Gleichungssystem für die Hüllkurve:

$$\left\{\begin{array}{lr} F(x,y,t) = 0 & (1) \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t) = 0 & (2) \end{array}\right\} \quad \text{d. h.} \quad \left\{\begin{array}{lr} y = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t & (1') \\ t^{-2}x^2 - 3 = 0 \quad | \cdot t^2 & (2) \end{array}\right\}$$

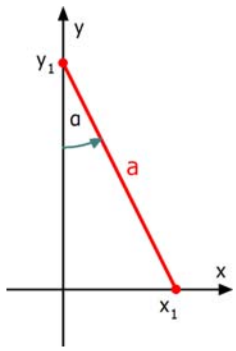
Aus (2) folgt: $x^2 - 3t^2 = 0 \iff 3t^2 = x^2 \iff t^2 = \frac{1}{3}x^2 \iff t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x$

Nun geht es weiter ab (*) in der 1. Methode.

Hinweis: **Man sollte stets wissen, dass** $F(x,y,t) = 0$ (1)
nichts anderes bedeutet als $y = f_t(x)$ (1').

In den folgenden Lösungen die zweite Methode verwenden.
Sie wird am meisten gezeigt.

Gleichung der Asteroide als Hüllkurve der Tangentenstäbe



Die Stange habe die Länge a. Die Achsenabschnittsgleichung der Stange

hat die Form: $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1$

Wegen $\sin(\alpha)=\frac{x_1}{a} \Rightarrow x_1=a\cdot\sin(\alpha)$. Analog gilt $y_1=a\cdot\cos(\alpha)$.

Dies ergibt: $\frac{x}{a\cdot\sin(\alpha)}+\frac{y}{a\cdot\cos(\alpha)}=1 \qquad |\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$$x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)=a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

Daraus definieren wir die Funktion F durch

$$F(x,y,\alpha)=x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

Jede einzelne Tangente ist Lösung der Gleichung $F(x,y,\alpha)=0$.

Gleichungssystem für die Hüllkurve:: $\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 & (1) \\ \frac{d}{d\alpha}F(x,y,\alpha)=0 & (2) \end{cases}$

(Jetzt mit α statt t)

Die Ableitung der impliziten Funktion F nach α lautet (x und y werden dabei als Konstante behandelt):

$$\frac{d}{d\alpha}F(x,y,\alpha)=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left[\cos^2(\alpha)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)\right]$$
$$=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(a)\right)$$

Das Gleichungssystem lautet damit

Zuerst: $\begin{cases} x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=0 & (1) \\ -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(a)\right)=0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} |\cdot\cos(\alpha) \\ |\cdot(-\sin(\alpha)) \end{matrix}$

$$\begin{cases} x\cdot\cos^2(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)=a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha) & (3) \\ x\cdot\sin^2(\alpha)-y\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=a\cdot\left(-\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)+\sin^3(a)\right) & (4) \end{cases}$$

(3) + (4): $x\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right)=a\cdot\sin^3(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{x=a\cdot\sin^3(\alpha)}$

Dann: $\begin{cases} x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=0 & (1) \\ -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(a)\right)=0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} |\cdot\sin(\alpha) \\ |\cdot\cos(\alpha) \end{matrix}$

$$\begin{cases} x\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin^2(\alpha)=a\cdot\sin^2(\alpha)\cdot\cos(\alpha) & (5) \\ -x\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\cos^2(\alpha)=a\cdot\left(\cos^3(\alpha)-\sin^2(a)\cdot\cos(\alpha)\right) & (6) \end{cases}$$

$y\cdot\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)=a\cdot\cos^3(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{y=a\cdot\cos^3(\alpha)}$

Wir berechnen: $x^{2/3}+y^{2/3}=\left(a\cdot\sin^3(\alpha)\right)^{2/3}+\left(a\cdot\cos^3(\alpha)\right)^{2/3}$

$$=a^{2/3}\cdot\sin^2(\alpha)+a^{2/3}\cdot\cos^2(\alpha)=a^{2/3}\cdot\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)$$

Also gilt: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Die Einhüllende ist somit die Asteroide.

4 Hüllkurven zu Parabelscharen aus 42064

Parabelschar 4

Gegeben ist die Funktionenschar: $f_t(x) = tx^2 - 3t + 2$ für $t \in R \setminus \{0\}$

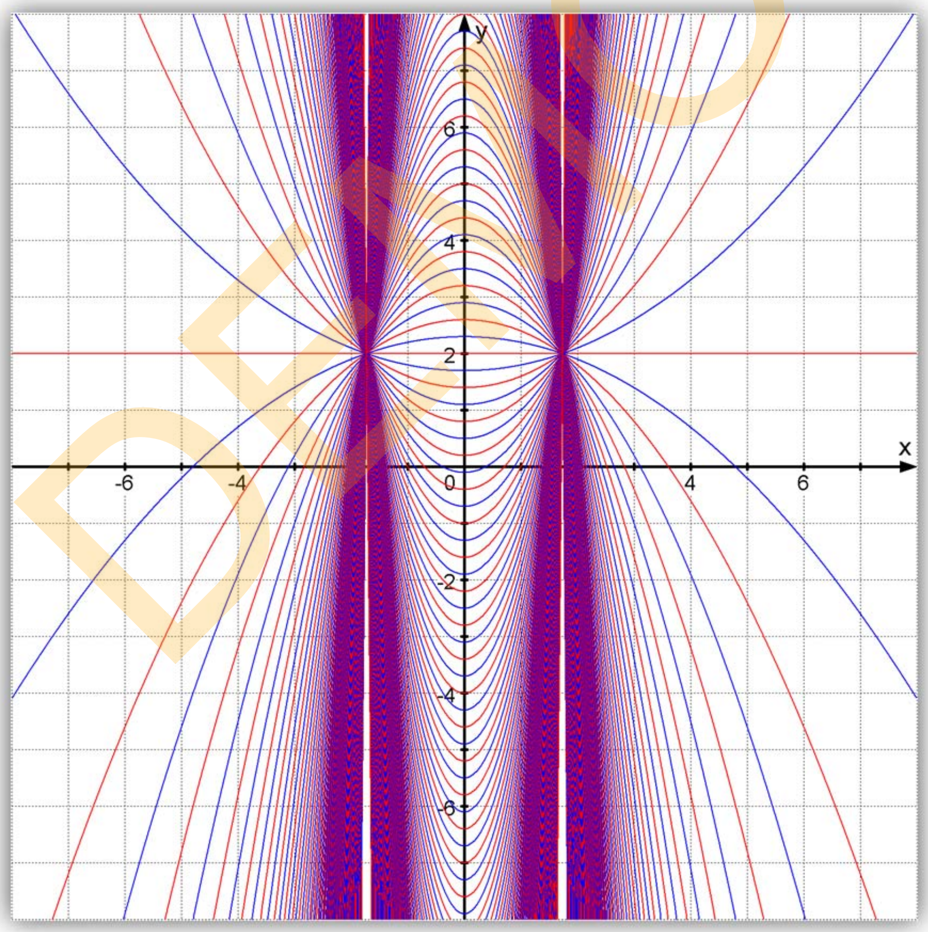
Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - tx^2 + 3t - 2 = 0$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\left\{\begin{matrix} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = tx^2 - 3t + 2 & (1) \\ -x^2 + 3 = 0 & (2) \end{matrix}\right\}$

Aus (2) folgt bereits die Lösung: $x^2 = 3$

d. h. $x = \sqrt{3}$ und $x = -\sqrt{3}$

Das sind zwei Parallelen zur y-Achse, die genau in den schmalen hellen Schlitzen liegen.



Parabelschar 5

Gegeben ist die Kurvenschar $y = f_t(x) = x^2 - 2tx - t^2$ für $t \in R$

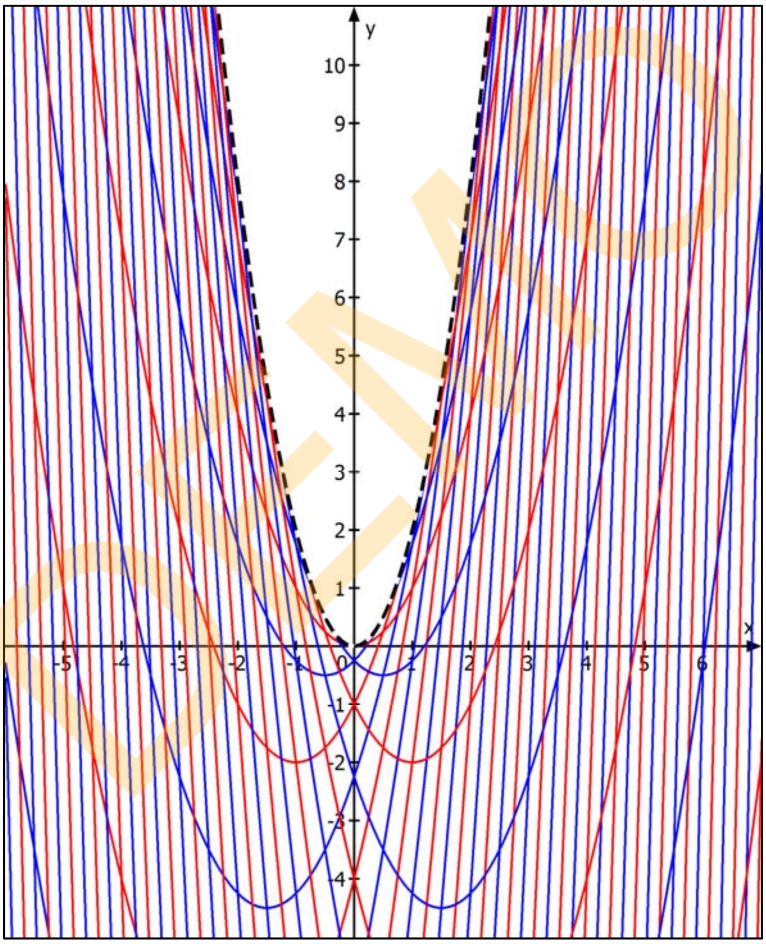
Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 + 2tx + t^2$

Partielle Ableitung nach t: $\frac{d}{dt}F(x,y,t) = F_t = 2x + 2t$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y = x^2 - 2tx - t^2 & (1) \\ 2x + 2t = 0 & (2) \end{array} \right\}$

Aus (2) folgt: x = - t.

Einsetzen in (1): $y = x^2 - 2x \cdot (-x) - x^2 \Leftrightarrow y = 2x^2$



Parabelschar 6

Gegeben ist die Parabelschar $y = f_t(x) = -tx^2 + 2x - 4t$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y + tx^2 - 2x + 4t$

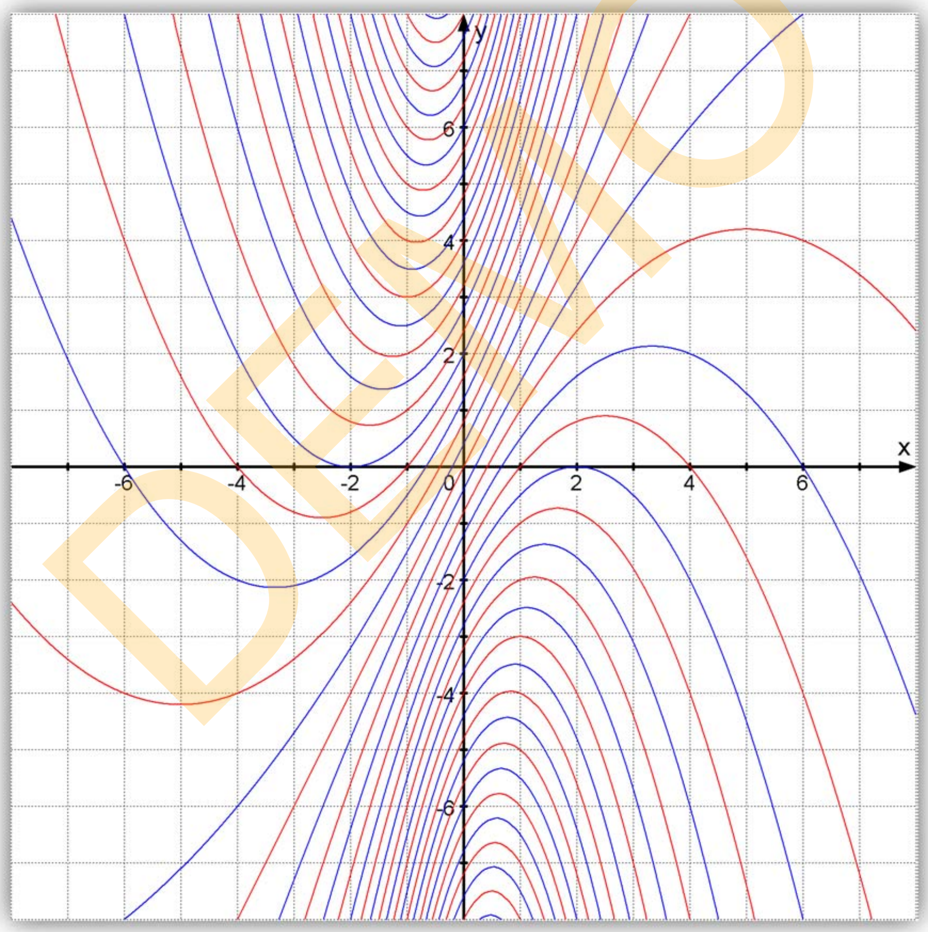
Partielle Ableitung nach t: $F_t = \frac{d}{dt}F(x,y,t) = x^2 + 4$

Gleichungssystem für die Hüllkurve:

$$\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -tx^2 + 2x - 4t & (1) \\ x^2 + 4 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$$

Aus (2) folgt: $x^2 = -4$

Diese Gleichung hat keine Lösung, also gibt es <u>keine Hüllkurve</u>.



Parabelschar 10

Gegeben ist die Parabelschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t + \frac{1}{t}$ für $t \in R \setminus \{0\}$

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - \frac{1}{t}x^2 + 2x - t - \frac{1}{t} = y - x^2 \cdot t^{-1} + 2x - t - t^{-1}$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\left\{ \begin{matrix} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t) = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} y = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t + \frac{1}{t} & (1) \\ x^2 \cdot t^{-2} - 1 + t^{-2} = 0 \quad | \cdot t^2 & (2) \end{matrix} \right\}$

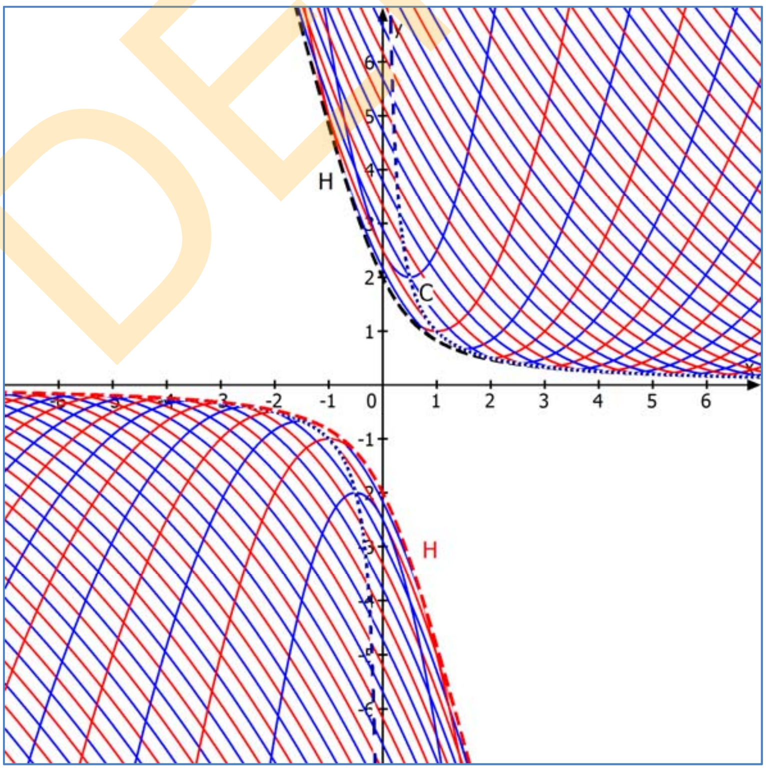
Aus (2): $x^2 - t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

(1) Zusammenfassen: $y = \frac{x^2 + t^2 + 1}{t} - 2x$ (1‘)

In (1‘): $y = \pm\frac{x^2 + x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2x$

Ergebnis: H: $y = \pm\frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2x$

Übrigens liegen alle Parabelscheitel auf der Kurve C: $y = \frac{1}{x}$ (Ortskurve der Scheitel)



Parabelschar 11

Gegeben ist die Parabelschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t - \frac{1}{t}$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t^{-1}x^2 + 2x - t + t^{-1}$

Gleichungssystem für die Hüllkurve:

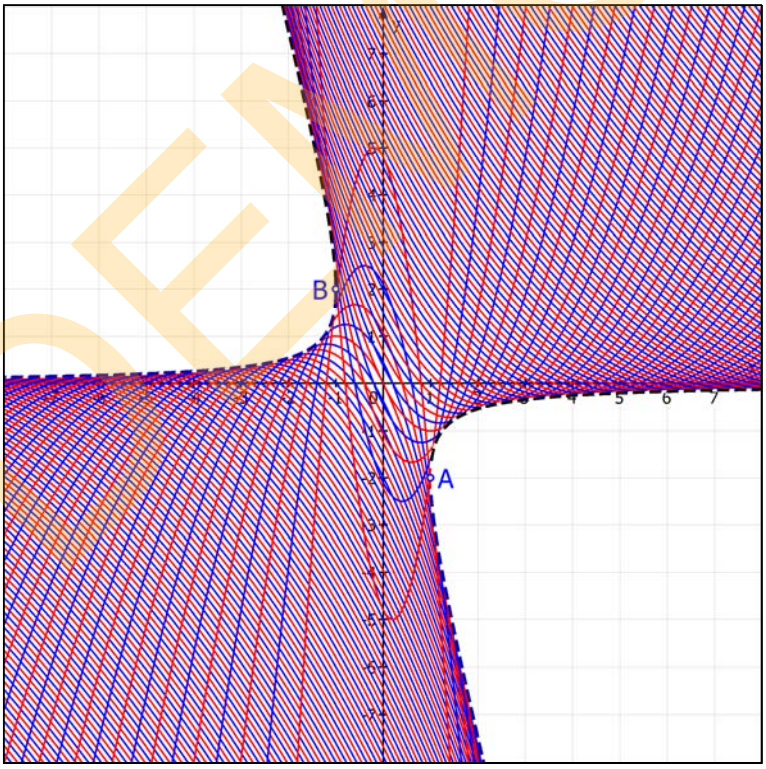
$$\left\{\begin{matrix} F(x,y,t)=0 \\ \frac{d}{dt}F(x,y,t)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=\frac{1}{t}x^2-2x+t-\frac{1}{t} & & (1) \\ -t^{-2}\cdot x^2+1+t^{-2}=0 & \mid \cdot t^2 & (2) \end{matrix}\right\}$$

Aus (2): $-x^2 + t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x^2-1}$

In (1): $y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2x \pm \sqrt{x^2-1} \mp \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Zusammengefasst: $y = \frac{x^2+t^2-1}{t} - 2x \Rightarrow y = \pm\frac{x^2+x^2-1-1}{\sqrt{x^2-1}} - 2x$

Ergebnis: Hüllkurve: $y = \frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2-1}} - 2x$



Die Funktion mit dem oberen Vorzeichen ist schwarz gestrichelt, die mit dem unteren dunkelblau.
Die beiden Kurven stoßen in A und B zusammen.

Parabelschar 13

Gegeben ist: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - tx - t - \frac{1}{t}$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t^{-1}x^2 + tx + t + t^{-1}$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = t^{-2} \cdot x^2 + x + 1 - t^{-2}$

Gleichungssystem für die Hüllkurve:

$$\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \frac{1}{t}x^2 - tx - t - \frac{1}{t} & & (1) \\ t^{-2} \cdot x^2 + x + 1 - t^{-2} = 0 & | \cdot t^2 & (2) \end{Bmatrix}$$

(2) $\cdot t^2$ ergibt: $x^2 + t^2 \cdot x + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2(x+1) = 1 - x^2$

$$t^2 = \frac{1-x^2}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x)} = 1 - x \Rightarrow t = \pm\sqrt{1-x} \qquad (3)$$

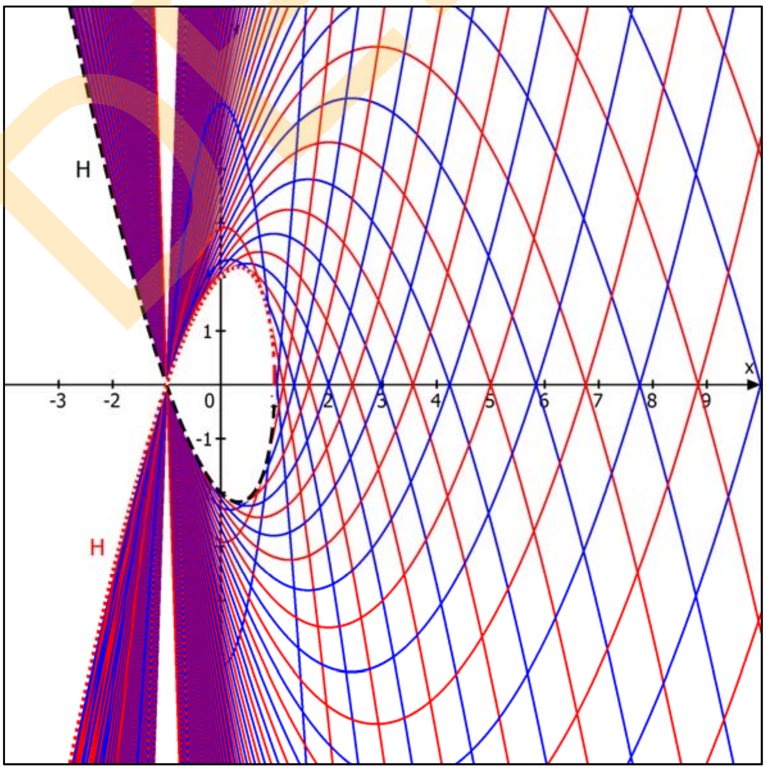
(1) y zusammenfassen: $y = \frac{x^2 - t^2x - t^2 - 1}{t}$

(3) eingesetzt: $y = \frac{x^2 - (1-x)x - (1-x) - 1}{\pm\sqrt{1-x}}$

Ergebnis: $y = \frac{x^2 - x + x^2 - 1 + x - 1}{\pm\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow y = \pm\frac{2x^2 - 2}{\sqrt{1-x}}$

Man kann weiter vereinfachen: $y = \mp 2\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} = \mp 2\frac{(1+x)(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \mp 2 \cdot (1+x)\sqrt{1-x}$

Oder implizit: $y^2 = 4(1+x)^2(1-x)$



Parabelschar 14

Gegeben: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 + tx - \frac{1}{t}$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 \cdot t^{-1} - x \cdot t + t^{-1}$

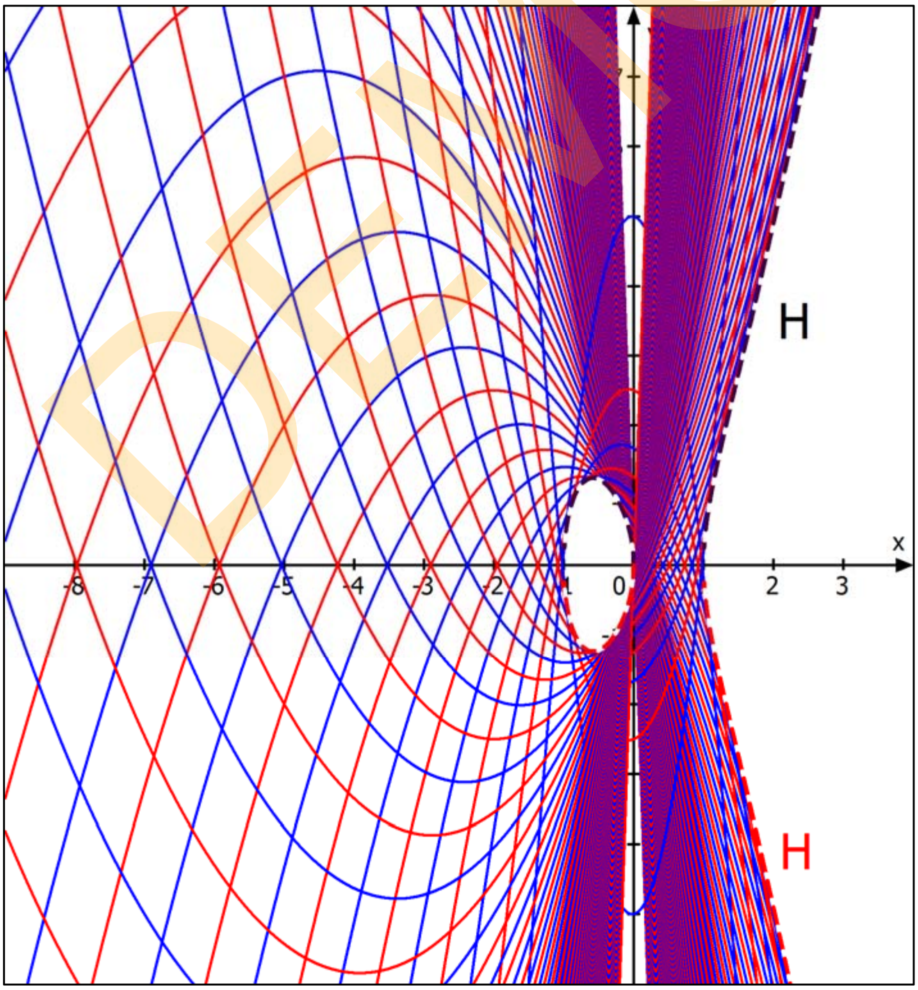
Partielle Ableitung nach t: $F_t = x^2 \cdot t^{-2} - x - t^{-2}$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \dfrac{x^2 + t^2x - 1}{t} & & (1) \\ t^{-2} \cdot x^2 - x - t^{-2} = 0 & \mid \cdot t^2 & (2) \end{Bmatrix}$

$(2) \cdot t^2$ ergibt: $x^2 - t^2 \cdot x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2x = x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

In (1): $y = \dfrac{x^2 + \frac{x^2-1}{x} \cdot x - 1}{\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}} = \dfrac{x^2 + x^2 - 1 - 1}{\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}} = \pm 2\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{x} = \pm 2\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x}$

Ergebnis: $y = \pm 2\sqrt{x^3 - x}$ bzw. $y^2 = 4\left(x^3 - x\right)$



Parabelschar 15

Gegeben ist: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - tx - t$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 \cdot t^{-1} + x \cdot t + t$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = x^2 \cdot t^{-2} + x + 1$

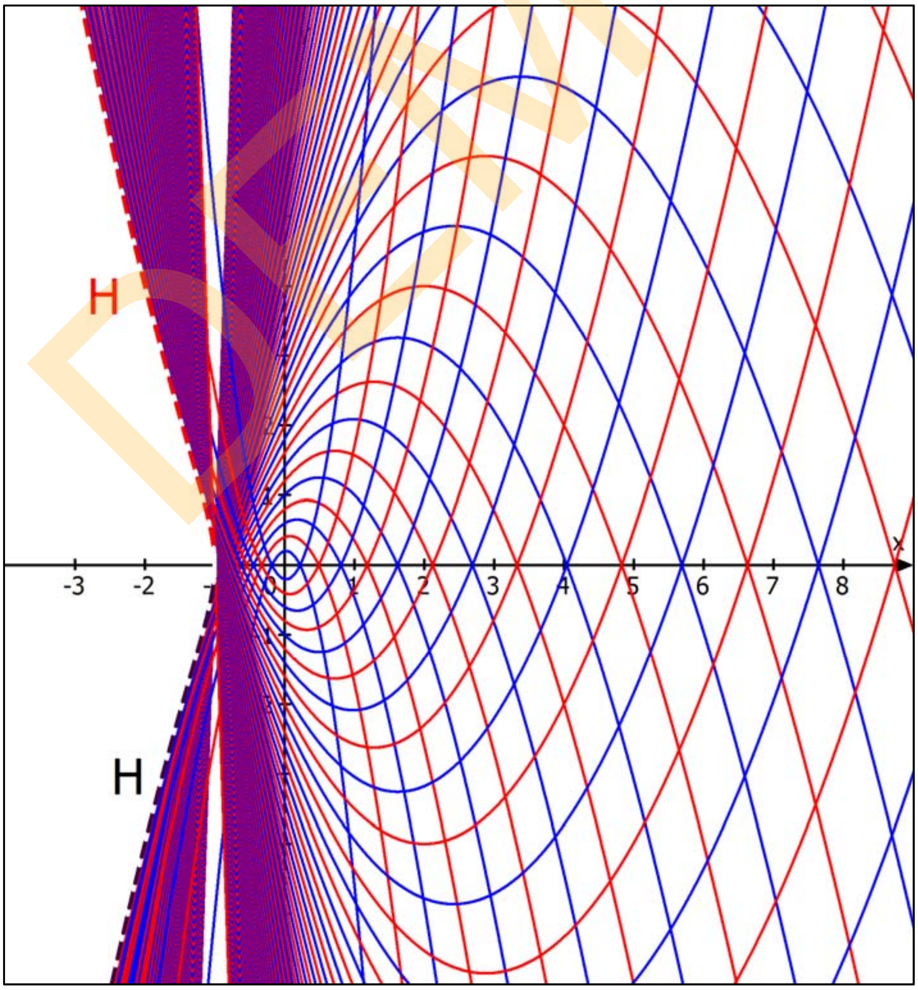
Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,t)=0 \\ F_t = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} y = \dfrac{x^2 - t^2(x+1)}{t} & (1) \\ x^2 \cdot t^{-2} + x + 1 = 0 \quad | \cdot t^2 & (2) \end{array}\right\}$

$(2) \cdot t^2$ ergibt: $x^2 + t^2 \cdot x + t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(x+1) = -x^2 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\dfrac{-x^2}{x+1}} = \pm\dfrac{x}{\sqrt{-(x+1)}}$

In (1): $y = \dfrac{x^2 - \dfrac{-x^2}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)}}{\pm\dfrac{x}{\sqrt{-(x+1)}}} = \pm\dfrac{2x^2}{x}\sqrt{-x-1} = \pm 2x\sqrt{-x-1}$

bzw. $y^2 = 4x^2(-x-1)$ bzw. $y^2 = -4x^3 - 4x^2$

Mit + erhält man den schwarz gestrichelten unteren Teil der Kurve H.



Parabelschar 17

Gegeben ist: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 + \frac{1}{t}x + t$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t^{-1} \cdot x^2 - t^{-1}x - t$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = t^{-2}x^2 + t^{-2}x - 1$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \dfrac{x^2 + x + t^2}{t} & & (1) \\ t^{-2}x^2 + t^{-2}x - 1 = 0 & \mid \cdot t^2 & (2) \end{Bmatrix}$

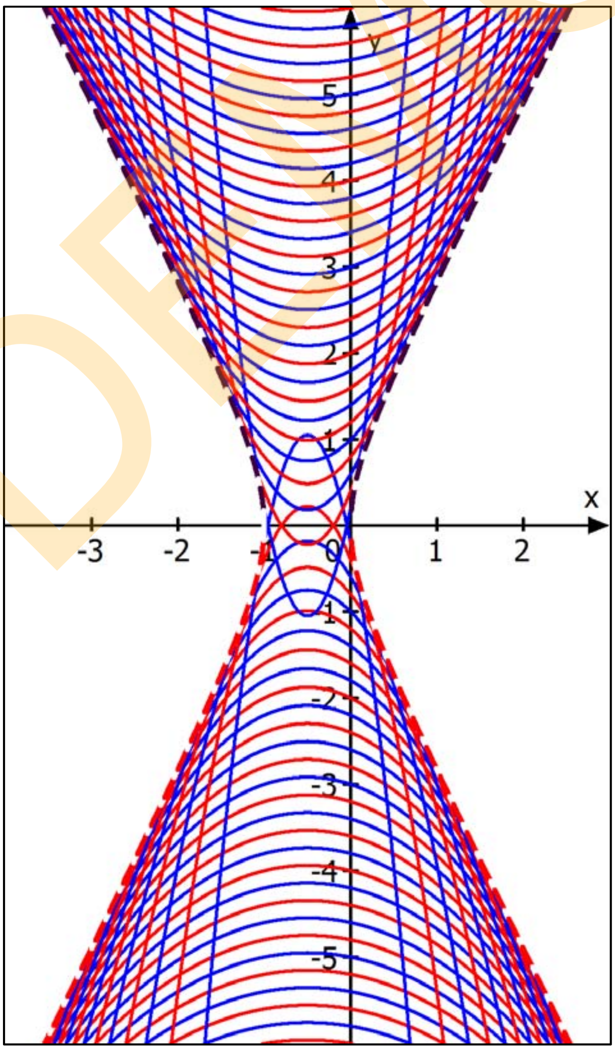
$(2) \cdot t^2$ ergibt: $x^2 + x - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x^2 + x \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x^2 + x}$

Einsetzen in y: $y = \dfrac{x^2 + x + (x^2 + x)}{\pm\sqrt{x^2 + x}} = \pm\dfrac{2(x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + x}} = \pm 2\sqrt{x^2 + x}$

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar mit der Hüllkurve $y^2 = 4x^2 + 4x$

bzw. die Schaubilder der beiden Funktionen $y = \pm 2 \cdot \sqrt{x^2 + x}$

+ ergibt die obere, schwarz gestrichelte Hüllkurve.



Parabelschar 18

Gegeben ist: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 + \frac{1}{t} + t$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t^{-1} \cdot x^2 - t^{-1} - t$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = t^{-2}x^2 + t^{-2} - 1$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \frac{x^2+1+t^2}{t} & & (1) \\ t^{-2}x^2 + t^{-2} - 1 = 0 & | \cdot t^2 & (2) \end{Bmatrix}$

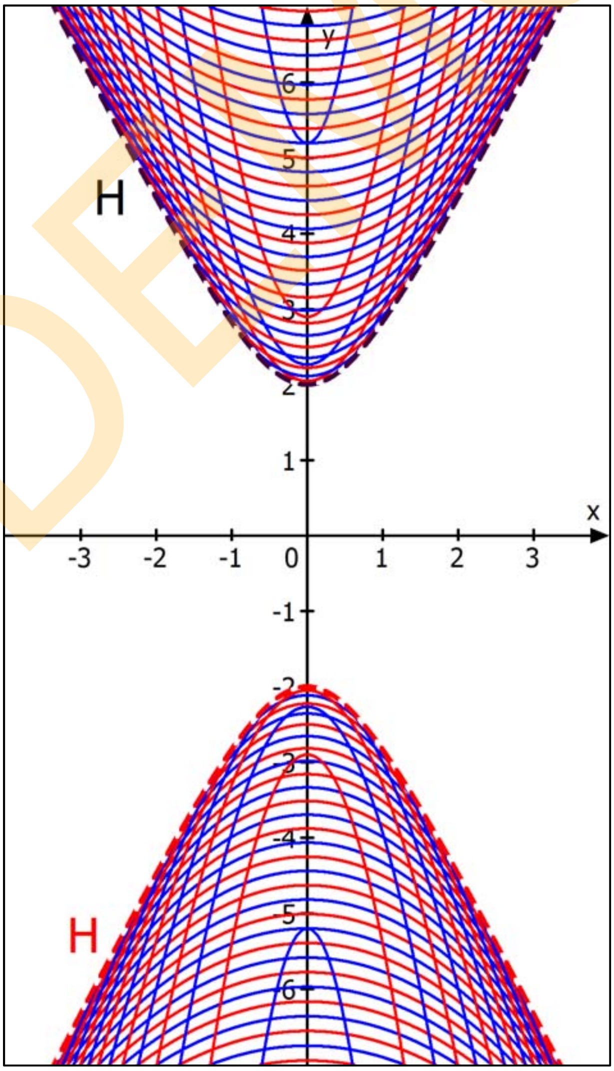
$(2) \cdot t^2$ ergibt: $x^2 + 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{x^2+1}$

Einsetzen in y: $y = \frac{x^2+1+(x^2+1)}{\pm\sqrt{x^2+1}} = \pm\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \pm 2\sqrt{x^2+1}$

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar mit der Hüllkurve $y^2 = 4x^2 + 4$

bzw. die Schaubilder der beiden Funktionen $y = \pm 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$

+ ergibt die obere, schwarz gestrichelte Hüllkurve.



Parabelschar 20

Gegeben ist: $f_t(x) = t \cdot x^2 + \frac{1}{t}$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t \cdot x^2 - t^{-1}$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -x^2 + t^{-2}$

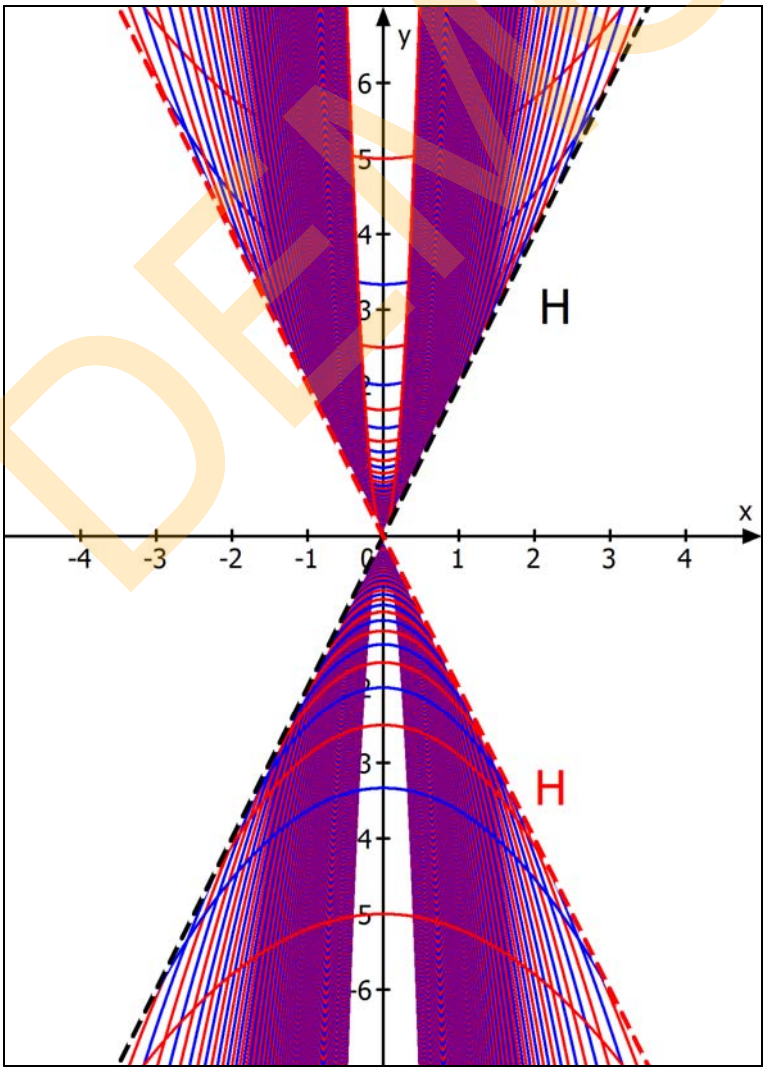
Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \frac{t^2x^2+1}{t} & (1) \\ -x^2 + t^{-2} = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus(2) folgt: $x^2 = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{x}$

In (1): $y = \frac{\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + 1}{\pm\frac{1}{x}} = \pm\frac{2}{\frac{1}{x}} = \pm 2x$

Die Hüllkurve besteht aus 2 Geraden: $y = 2x$ und $y = -2x$

bzw. $y^2 = 4x^2$ in einer algebraischen Gleichung.



Parabelschar 21

Gegeben ist: $f_t(x) = t \cdot x^2 + \frac{1}{t} - t$ mit $t \in R \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t \cdot x^2 - t^{-1} + t$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -x^2 + t^{-2} + 1$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \dfrac{t^2x^2 + 1 - t^2}{t} & (1) \\ -x^2 + t^{-2} + 1 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus(2) folgt: $-x^2 + \frac{1}{t^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

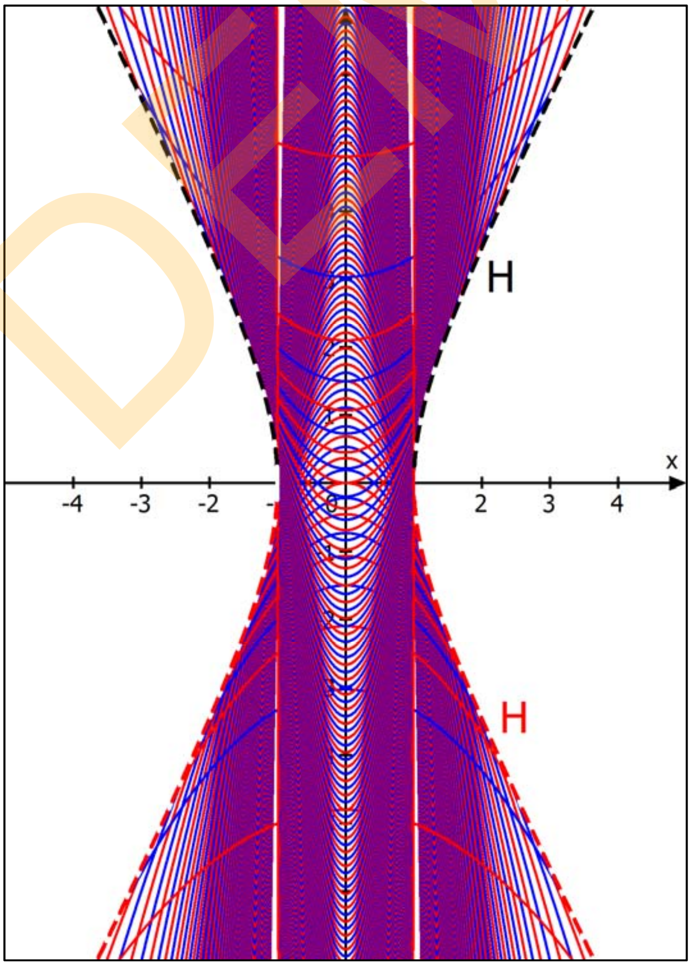
Einsetzen in (1): $y = \dfrac{\frac{x^2}{x^2-1} + 1 - \frac{1}{x^2-1}}{\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$

Erweitern mit $(x^2 - 1)$ $y = \dfrac{x^2 + (x^2-1) - 1}{\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)} = \pm 2\frac{x^2-1}{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2-1} = \pm 2 \cdot \sqrt{x^2-1}$

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar mit der Hüllkurve $y^2 = 4x^2 - 4$

bzw. die Schaubilder der beiden Funktionen $y = \pm 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

+ ergibt die obere, schwarz gestrichelte Hüllkurve.



Parabelschar 24

Gegeben ist: $f_t(x) = t \cdot x^2 + (t-1)^2 x$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t \cdot x^2 - (t-1)^2 x$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -x^2 - x \cdot 2(t-1)$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = t \cdot x^2 + (t-1)^2 x & (1) \\ -x^2 - 2tx + 2x = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

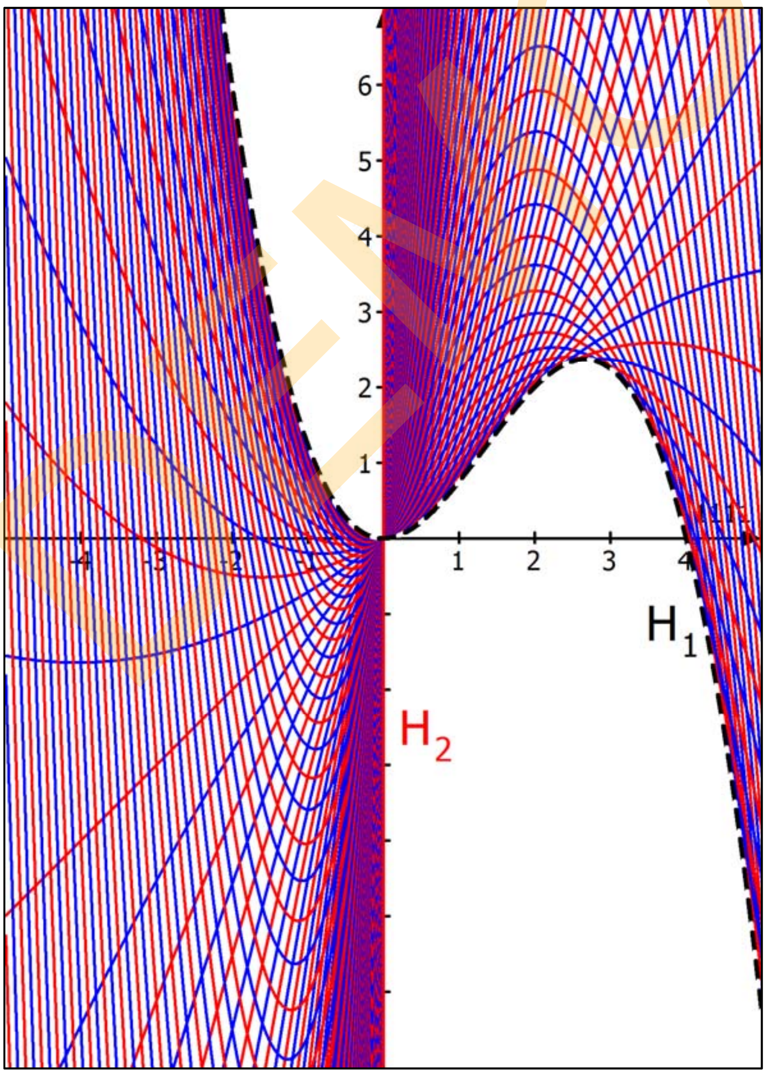
Aus (2) folgt: $x \cdot (-x - 2t + 2) = 0$ (3)

1. Lösung: $x = 0$ (y-Achse)

2. Lösung: $-x - 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2t = 2 - x \Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{2}x$

Einsetzen in y: $y = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \cdot x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}x - 1\right)^2 \cdot x = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2$

Die Hüllkurve besteht aus 2 Teilen: Die y-Achse und die Kurve $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2$



Parabelschar 25

Gegeben ist: $f_t(x) = x^2 + t^2 \cdot x$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 - t^2 x$

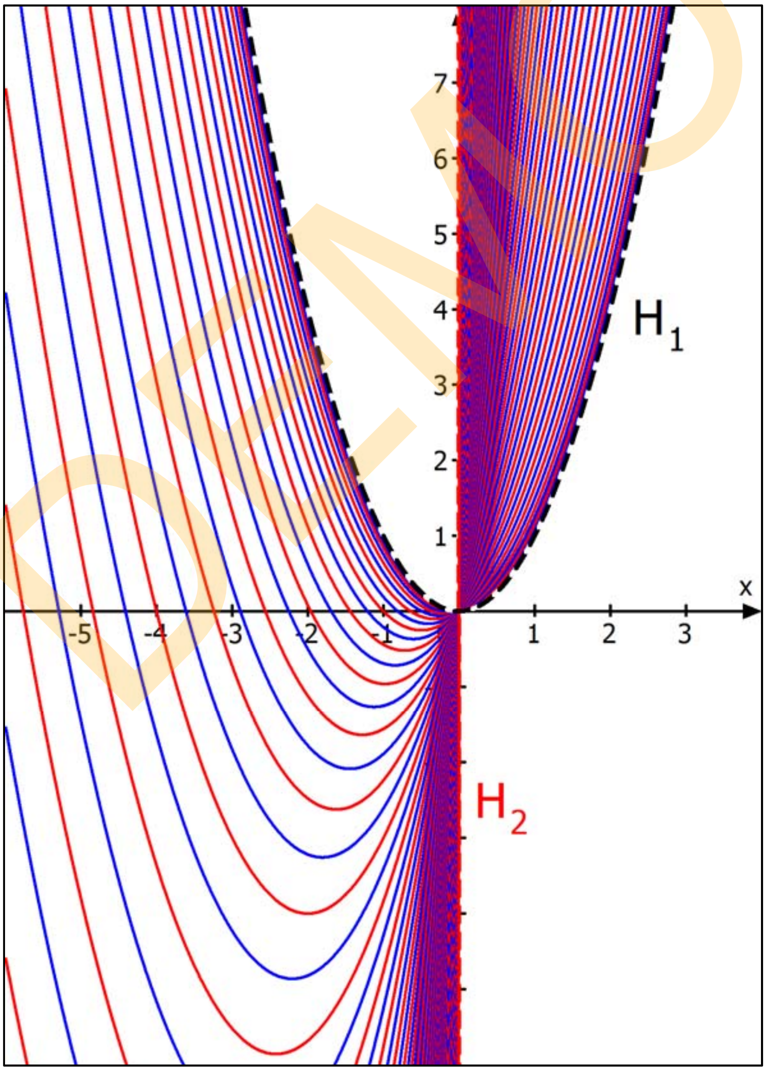
Partielle Ableitung nach t: $F_t = -2tx$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 + t^2 x & (1) \\ -2tx = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus(2) folgt: $x \cdot t = 0$

1. Lösung: $x = 0$ (y-Achse)
2. Lösung: $t = 0$ Einsetzen in y: $y = x^2$

Die Hüllkurve besteht aus 2 Teilen: Die y-Achse und die Kurve $y = x^2$



Parabelschar 26

Gegeben ist: $f_t(x) = x^2 + (t^2 - 4)x$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 - (t^2 - 4)x$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -2tx$

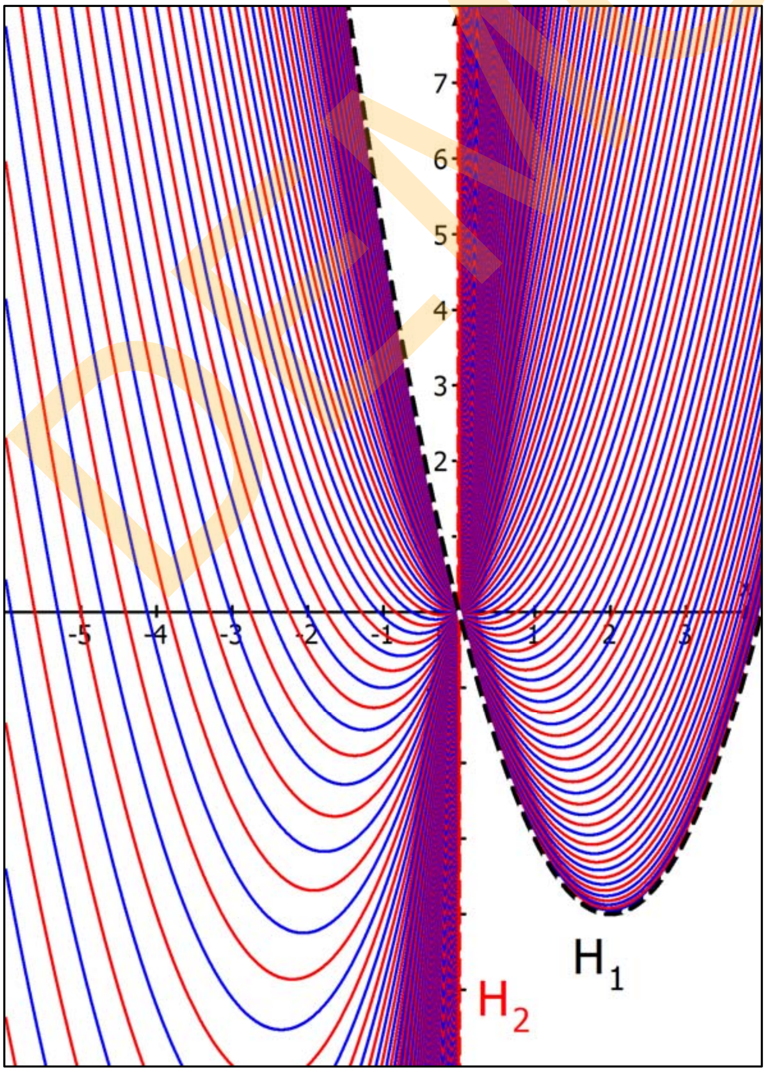
Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 + (t^2 - 4)x & (1) \\ -2tx = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus(2) folgt: $x \cdot t = 0$

1. Lösung: $x = 0$ (y-Achse)

2. Lösung: $t = 0$ Einsetzen in y: $y = x^2 - 4x$

Die Hüllkurve besteht aus 2 Teilen: Die y-Achse und die Kurve $y = x^2 - 4x$



Parabelschar 27

Gegeben ist: $f_t(x) = x^2 + \sqrt{t} \cdot x$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - x^2 - \sqrt{t} \cdot x$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot x$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\begin{Bmatrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 + \sqrt{t} \cdot x & (1) \\ -\frac{x}{2\sqrt{t}} = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus(2) folgt: $-\frac{x}{2\sqrt{t}} = 0$ d. h. $x = 0$

Die Hüllkurve ist also nur die y-Achse.

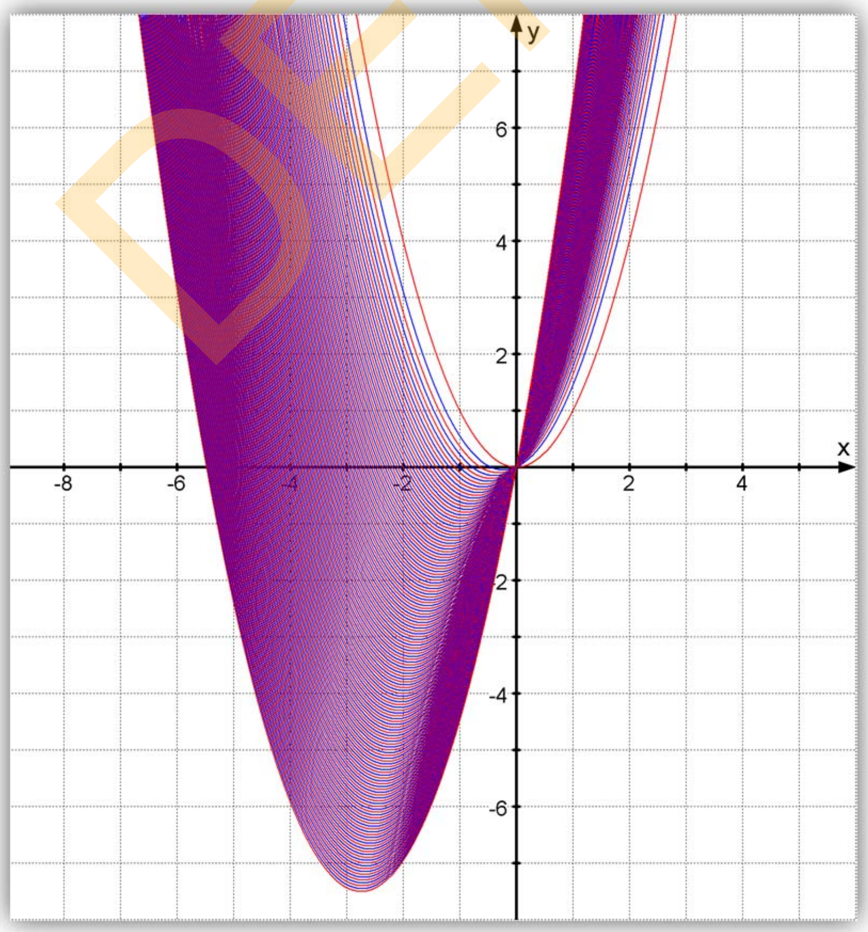
Nach links und nach unten „breiten" sich die Parabeln
mit wachsendem t unbegrenzt aus. Dort gibt es keine begrenzende Hüllkurve.
Man erkennt das z. B. am Scheitel der Scharparabeln:

$f'_t(x) = 2x + \sqrt{t}$. Die Bedingung $f_t'(x) = 0$ führt dann zu $x_S = -\frac{1}{2}\sqrt{t}$

$y_S = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)^2 + \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{4}t$

Also ist $S\left(-\frac{1}{2}\sqrt{t} \mid -\frac{1}{4}t\right)$

Für $t \to \infty$ gehen $x_S \to -\infty$ und $y_S \to -\infty$, also nach links unten.



Parabelschar 28

Gegeben ist: $f_t(x) = (t^2 - t) \cdot x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hilfsfunktion: $F(x,y,t) = y - t^2x^2 + tx^2 - t$

Partielle Ableitung nach t: $F_t = -2tx^2 + x^2 - 1$

Gleichungssystem für die Hüllkurve: $\left\{\begin{matrix} F(x,y,t) = 0 \\ F_t = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = (t^2 - t) \cdot x^2 + t & (1) \\ -2tx^2 + x^2 - 1 = 0 & (2) \end{matrix}\right\}$

Aus (2) folgt: $2tx^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

Einsetzen in (1): $y = \left(\frac{x^2 - 1}{2x^2}\right)^2 \cdot x^2 - \frac{x^2 - 1}{2x^2} \cdot x^2 + \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

$$y = \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2} - \frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2} + \frac{2x^2 - 2}{4x^2} - \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$y = \frac{x^4 - 1}{4x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

Ergebnis: Hüllkurve: $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2}$